威廉 · 布拉施克的数学工作及其对陈省身的影响

杨 鼎

编者按: 本文是基于雅格龙 (I. M. Yaglom) 所写的讣告[18]以及陈省身所写的关于布拉施克对数学的贡献的短文[7]而写成。

布拉施克的生平

布拉施克于 1885 年出生在奥地利的格拉茨市。他的早期数学训练受自于其作为中学几何教师的父亲。此后, 他求教于许多著名的几何学家, 包括维尔丁格 (W. Wirtinger)、施图迪 (E. Study)、比安基 (L. Bianchi)、恩格尔 (F. Engel)、希尔伯特 (D. Hilbert) 和克莱因 (F. Klein)。1919 年, 他被任命为新建的汉堡大学的教授, 并终身留在那里任职。在他的同事中有冯 · 诺依曼 (von Neumann)、西格尔 (C. L. Siegel)、阿廷 (E. Artin)、奥斯特洛斯基 (A. M. Ostrowski)、拉德马赫 (H. A. Rademacher)、拉东 (J. K. A. Radon)、赫克 (E. Hecke)、哈塞 (H. Hasse)、科拉茨 (Kollatz)、尼尔森 (Nielsen)、施赖埃尔 (O. Schreier) 和施佩纳 (E. Sperner)。他的最著名学生是桑塔洛 (Luis Santaló) 和陈省身。

布拉施克的数学工作

布拉施克最著名的工作是在凸几何、仿射微分几何和积分几何领域。

• 在凸几何学中, 布拉施克建立了关于凸体序列的一个紧性定理, 现在被称为"布拉施克选择定理", 并用其证明了一个新的严格的凸几何不等式。它表明了任何一个包含在一个有界集中的凸集序列必有一个子列, 其关于豪斯多夫度量而言是收敛的。这个结果一直是建立凸体所满足的严格等周型不等式的有用工具。

布拉施克也阐述了现在所谓的布拉施克–桑塔洛不等式, 这是关于凸体的一个基本的仿射几何不等式。它与概率论和泛函分析, 也与数论、偏微分方程和微分几何有着深刻的联系。对布拉施克–桑塔洛不等式推广的研究至今仍很活跃。这个不等式表明, 给定了一个质心在原点的凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$, 并记其极体为 K^*, 则其体积满足不等式 $V(K)V(K^*) \leqslant V(B)^2$, 这里 B 是标准的欧氏球体, 且等号成立的充要条件是 K 为椭球体。布拉施克对 $n \leqslant 3$ 建立了这个不等式, 桑塔洛 [15] 将其推广

到所有维数。

凸几何学中最重要的长期未解决问题之一是马勒猜想 (Mahler conjecture), 它声称存在着一个逆向的严格不等式, 并且等号成立的充要条件是凸体为单形。这个猜想仅在附加假设的情况下得到了证明, 对此猜想的研究仍很活跃。

• 积分几何学的工作至少可追溯到克罗夫顿 (M. W. Crofton), 他证明了与平面中一条曲线弧相交的直线集合的不变测度是和弧长成正比例的。然而, 布拉施克是第一个将积分几何视为与微分几何同等重要的数学家。他带头打造该学科的基础, 他的学生陈省身和桑塔洛则继续他的工作。

特别地, 布拉施克开创了运动学公式的系统研究。运动学公式可如下表述为: 设 G_1 和 G_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的几何对象 (如线性子空间、子流形或子区域)。它们中的每一个都自然地带有相应的几何不变量, 如欧拉 (Euler) 示性数、体积和边界的体积等。另一方面, G_2 的积分不变量可定义为 G_1 的刚性运动与 G_2 的交集的几何不变量关于所有的刚体运动的平均。运动学公式表明, 后者乃是前者的线性组合。

布拉施克的工作集中于欧氏空间, 但是运动学公式可推广到由变换群所定义的其他几何结构中。许多此类的推广工作已由陈省身、桑塔洛和其他人完成。例如, 可参见桑塔洛的书 [16]。陈省身则在诸如文献 [5, 6] 的工作中, 表明了如何把运动学公式推广到齐性空间。

• 布拉施克也按照克莱因的埃朗根纲领,开创了仿射微分几何学的研究。在其关于微分几何学的系列专著的第二卷 [2] 中, 他对于 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形, 系统导出了局部微分几何不变量, 它们在仿射变换下不变, 或者具有良好的表现。他最著名的工作是引进了 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ 中超曲面的仿射法线的概念。仿射法线是欧氏微分几何中高斯映射的仿射类似, 它可用来定义仿射球面的概念, 也可用来描述蒙日–安培 (Monge-Ampère) 型偏微分方程的解。关于仿射球面的概述可参看洛夫廷 (Loftin) [13] 和洛夫廷–王–杨 (Loftin-Wang-Yang) [14]。

• 布拉施克对黎曼几何的主要贡献是其解释性的著作, 并对今后的数学家提出应该去研究的问题。其最著名的例子是 “布拉施克猜想”。

布拉施克引进了 “再见曲面” (Wiedersehen surface) 的概念: 一个闭的二维黎曼流形 M 被称为是 “再见的” (Wiedersehen), 如果存在 $d > 0$, 使得对于每点 $p \in M$, 存在着另一点 $q \in M$, 使得每一条从 p 出发的测地线经过距离 d 后必能到达 q 点。布拉施克于 1921 年在文献 [3] 中猜想, 任何再见曲面必为具有常曲率的黎曼度量的 2-球面。陈省身在文献 [7] 中描述了这个猜想的早期历史。这个猜想被格林 (Green)[12] 所证明。

“再见曲面” 的定义可以毋须改变而推广到高维的 “再见流形”。布拉施克猜想在高维时是否成立的问题, 直到前不久才获解决。在以贝斯 (A. L. Besse) 为作者名 (伯杰——Marcel Berger——的一个假名) 的著作 [1] 的附录 D 中, 伯杰

利用了卡兹当 (J. L. Kazdan) 的一个不等式 (在文献 [1] 的附录 E 中) 证明了 n 维再见流形的体积不能小于半径 $r = \frac{d}{2\pi}$ 的标准 n 维球面的体积。温斯坦 (A. Weinstein)[17] 证明了再见流形 M 的体积可由 M 中闭测地线空间上的上同调计算所给出, 并藉此证明了偶数维的布拉施克猜想。杨忠道[19] 则对奇数维的情况进行了上同调计算, 从而完成了对布拉施克猜想的证明。

布拉施克对陈省身的影响

陈省身首次遇见布拉施克是在 1932 年后者访问北京时, 当时陈省身还是一个年轻的学生。根据陈省身所说[7], 布拉施克的 "坚信数学是一门生气勃勃和明白易懂的学科" 对陈省身决定到汉堡大学去学习数学起了重要的作用。陈省身于 1934 年来到汉堡, 在布拉施克的指导下, 于 1936 年获得博士学位。陈省身也开始跟随凯勒 (Kähler) 学习外微分系统和现在所谓的嘉当–凯勒理论。随后, 布拉施克安排陈省身到巴黎的埃利 · 嘉当那里继续学习一年。

陈省身能够运用外微分形式, 十分有效地把布拉施克关于微分几何和积分几何的思想推广到更抽象的框架中去。类似的计算导致了陈省身求管子体积的工作, 并最终使他发现了示性类。

在索菲斯 · 李 (S. Lie) 和庞加莱 (J. H. Poincaré) 早期工作的影响下, 布拉施克和他的学生博尔 (Bol)[4] 研究了网几何学。陈省身和格里菲思 (P. A. Griffiths)[10,11,9] 对该课题做了一些工作。详情可参看如陈省身所写的综述文章 [8]。

参考文献

[1] Arthur L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], vol. 93, Springer-Verlag, Berlin, 1978, With appendices by D. B. A. Epstein, J.-P. Bourguignon, L. B′erard-Bergery, M. Berger and J. L. Kazdan.

[2] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. II. Affine Differentialgeometrie, bearbeitet von K. Reidemeister. Erste und zweite Auflage.*, J.Springer, Berlin, 1923.

[3] Wilhelm Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativit?tstheorie. Band I. Elementare Differentialgeometrie*, Dover Publications, New York, N. Y.,1945, 3d ed.4

[4] Wilhelm Blaschke and Gerrit Bol, *Geometrie der Gewebe. Topologische Fragen der Differentialgeometrie*, J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1944.

[5] S. S. Chern, *On integral geometry in Klein spaces*, Ann. of Math. (2) **43** (1942), 178–189.

[6] S. S. Chern, *On the kinematic formula in integral geometry*, J. Math. Mech. **16** (1966), 101–118.

[7] S. S. Chern, *The mathematical works of Wilhelm* Blaschke, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **39** (1973), 1–9.

[8] S. S. Chern, *Web geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), no.1, 1–8.

[9] S. S. Chern and P. Griffiths, *Corrections and addenda to our paper: "Abel's theorem and webs" [Jahresber. Deutsch. Math. -Verein. 80 (1978), no. 1-2, 13-110; MR 80b:53008]*, Jahresber. Deutsch. Math.- Verein. **83** (1981), no. 2, 78–83.

[10] S. S. Chern and Phillip Griffiths, *Abel's theorem and webs*, Jahres ber.Deutsch. Math.-Verein. **80** (1978), no. 1-2, 13–110.

[11] Shiing Shen Chern and Phillip A. Griffiths, *An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **5** (1978), no. 3, 539–557.

[12] L. W. Green, *Auf Wiedersehensflächen*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 289–299.

[13] J. Loftin, *Survey on affine spheres*, Handbook of Geometric Analysis, No. 2, International Press, 2010.5

[14] J. Loftin, X.-J. Wang, and D. Yang, *Cheng and Yau's work on the Monge-Ampère equation and affine geometry*, Handbook of Geometric Analysis, No. 2, International Press, 2010.

[15] L. A. Santaló, *An affine invariant for convex bodies of n-dimensional space*, Portugaliae Math. **8** (1949), 155–161.

[16] L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[17] A. Weinstein, *On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed*, J. Differential Geometry **9** (1974), 513–517.

[18] I. M. Yaglom, *Wilhelm Blaschke (Obituary)*, Russ. Math. Surv **18** (1963), 135–143.

[19] C. T. Yang, *Odd-dimensional wiedersehen manifolds are spheres*, J. Differential Geom. **15** (1980), no. 1, 91–96 (1981).